FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Trabajo de Fin de Máster

LA HISTORIA DEL ÁLGEBRA EN LAS AULAS DE SECUNDARIA

Para acceder al Titulo de

MÁSTER EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Autora: Paula Albendea Herrera

Director: Fernando Etayo Gordejuela

Junio – 2011

“Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo”

Benjamin Franklin

Índice de Contenidos

Índice de Figuras

1. Introducción y justificación

Tradicionalmente se ha considerado innecesario incluir la Historia de las Matemáticas en la formación de los estudiantes de todos los niveles (educación primaria, secundaria y universitaria). Se creía que no aportaba nada, que no era necesario conocerla. Sin embargo, la Historia de las Matemáticas tiene un enorme poder, ya que nos ayuda a completar un aspecto fundamental de nuestra formación científica y didáctica: la comprensión de la propia ciencia [1].

Conocer como han ido surgiendo y evolucionando los diversos conceptos y cuáles han sido las dificultades a las que la mente humana se ha ido enfrentando nos ayudará a entenderlos y, sobre todo, a comprender en qué contexto y con qué motivación fueron desarrollados.

Este conocimiento puede ser muy interesante y útil para los profesores de matemáticas que deban transmitir estos conceptos, sobre todo de cara a prever las dificultades con las que se van a encontrar los alumnos, sirviendo además para motivarles e interesarles, al mostrarles la parte más humana de esta disciplina.

Partiendo de un enfoque que considera que la Historia de las Matemáticas permitirá obtener más éxitos en la enseñanza de la materia, se proponen diferentes actividades y recursos a través de los cuales acercar a los alumnos de secundaria y bachillerato a las Matemáticas desarrolladas por las Civilizaciones de la Edad Antigua y de la Edad Media.

2. Estado de la cuestión y relevancia del tema

La importancia de incluir la Historia de las Matemáticas en su enseñanza durante la etapa de Educación Secundaria viene respaldada por la legislación educativa vigente en España y más concretamente en la Comunidad autónoma de Cantabria, donde los currículos oficiales de Matemáticas establecidos para la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato recogen la importancia de recurrir a la Historia de las Matemáticas a la hora de transmitir a los alumnos los diferentes contenidos:

- Decreto 57/2007, de 10 de mayo, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Cantabria:
  - *"Otro aspecto que conviene tener en cuenta en el desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas en esta etapa es el de su historia (…) el desvelar las dificultades y procesos llevados a cabo a lo largo de los siglos para llegar a los resultados que ven hoy, no sólo les puede motivar e interesar en su estudio, sino que hace que esta ciencia muestre un aspecto más humano..."*
- Decreto 74/2008, de 31 de julio por el que se establece el Currículo del Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Cantabria.
  - *"Para entender mejor algunos conceptos matemáticos se puede acudir a la historia de las matemáticas, que nos desvela el proceso de emergencia de las matemáticas en el tiempo. (…) La historia de las matemáticas se puede y se debe utilizar para entender una idea difícil del modo más adecuado."*

La importancia de recurrir a la Historia viene asimismo corroborada por el incremento que en los últimos años ha experimentado el número de innovaciones e investigaciones educativas y de publicaciones orientadas a ello.

Este tipo de publicaciones son cada vez más frecuentes, pero siguen siendo insuficientes. Además, en la mayoría de los casos se realiza una propuesta para trabajar en un momento determinado del curso o bien para abordar unos contenidos concretos del currículo, siendo muy pocas las que proponen una metodología para el trabajo día a día en el aula [1]. La mayoría de los esfuerzos se centran en integrar las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas y/o relacionarlas con otras áreas o materias, intentando concienciar a los alumnos de su importancia y utilidad en la vida cotidiana, y sus aplicaciones en numerosos campos [2-4].

Encontramos por ejemplo el artículo *"Las matemáticas también son cultura"* [5], en el que a través de una serie de teoremas clásicos, el autor repasa someramente la historia de las matemáticas, o trabajos que hablan sobre las mujeres y su aportación a las Matemáticas a lo largo de la historia [6-7].

Igualmente, se han desarrollado propuestas como *"El cero, punto de encuentro"* [8], un proyecto interdisciplinar para la animación a la lectura y educación en valores a través del libro titulado *"El Señor del Cero"*, de María Isabel Molina, un texto que permite conocer la historia de las matemáticas al indagar sobre el origen de las cifras, la evolución de los sistemas de numeración, algoritmos, instrumentos de cálculo y biografías de grandes matemáticos, o como *"El Quijote y las Matemáticas"* [9], en el que con motivo de la celebración del cuarto centenario de la primera edición de "El Quijote" se seleccionan algunos fragmentos del libro en los que las matemáticas son protagonistas, a partir de los cuales se plantean diferentes problemas y actividades a los alumnos.

Asimismo, existen proyectos y propuestas que intentan despertar el talento matemático de los alumnos recurriendo, entre otras fuentes y recursos, a la historia de las Matemáticas. Entre ellos se encuentran:

- El "Taller de talento matemático", organizado por la Universidad de Zaragoza y dirigido a alumnos de segundo ciclo de la ESO.
- El proyecto "Estalmat" (para alumnos de 12 y 13 años) y el taller de "Matemáticas en Acción" (ciclo abierto a todos los públicos, pero especialmente dirigido a profesores de educación secundaria y alumnos de la Universidad), organizados por la Universidad de Cantabria.

3. Objetivos

El principal objetivo que se persigue en este documento es proponer una metodología de trabajo en el aula que permita abordar los contenidos del currículo de Matemáticas de una forma natural y motivadora que fomente el aprendizaje significativo de los alumnos, recurriendo para ello a la Historia de las Matemáticas. El trabajo se centrará concretamente en las aportaciones matemáticas de las Civilizaciones de la Edad Antigua y la Edad Media al Álgebra.

Para ello se establecen los siguientes objetivos específicos:

- Hacer un pequeño recorrido histórico a lo largo de la Edad Antigua y de la Edad Media, viendo cuáles fueron las aportaciones de las principales Civilizaciones de estas épocas al álgebra.

- Determinar cuáles de los contenidos del currículo de Matemáticas actual podrían trabajarse a partir de estas nociones históricas.
- Seleccionar en cada caso las actividades más adecuadas desde el punto de vista didáctico y decidir cuál sería el curso más idóneo para desarrollarlas.
- Investigar sobre posibles recursos educativos y medios tecnológicos multimedia con los que se podrían desarrollar estas actividades.
- Hacer, para cada una de las civilizaciones, una propuesta de actividades a desarrollar en el aula considerando todos los puntos anteriores.
- Determinar las principales ventajas que se obtendrían al desarrollar la metodología propuesta en el aula.

4. *La historia del álgebra y su incorporación a las aulas de secundaria*

El álgebra es una rama de las matemáticas que emplea números, letras y signos para generalizar las distintas operaciones aritméticas y analizarlas desde un punto de vista abstracto y genérico. A lo largo de la historia, esta ciencia ha ido evolucionando gracias a las contribuciones de las diferentes civilizaciones y culturas, de las que hemos heredado numerosos testimonios.

En este trabajo se pondrán de relieve las principales contribuciones al Álgebra de las Civilizaciones de la Edad Antigua y la Edad Media, analizándose el contexto en el que se produjeron y proponiendo diferentes actividades y recursos que permitan su introducción en las aulas de secundaria, considerando para ello el currículo vigente.

La siguiente tabla recoge los contenidos que se trabajarán (organizados por bloques y cursos) acompañados de un código que se utilizará para referenciarlos a lo largo del documento (ejemplo: contenido g1 de 1ºESO).

	CONTENIDOS
BLOQUE	**1º ESO**
Bloque de números	g1. Ejemplos de otros sistemas de numeración: Binario, **Sexagesimal**, Romano. Sus usos actuales.
Bloque de álgebra	a1. Empleo de letras para simbolizar números inicialmente desconocidos y números sin concretar. Utilidad de la simbolización para expresar cantidades en distintos contextos.

	a2. Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano al algebraico y viceversa. Búsqueda y expresión de propiedades, relaciones y regularidades en secuencias numéricas. a3. Obtención de valores numéricos en fórmulas sencillas.
	2º ESO
Bloque de álgebra	a1. Obtención del valor numérico de una expresión algebraica. a2. Operaciones elementales. Equivalencia de expresiones algebraicas. a3. Igualdades. Identidades y Ecuaciones. a4. Significado de las ecuaciones y de las soluciones de una ecuación. a5. Resolución de ecuaciones de primer grado. Transformación de ecuaciones en otras equivalentes. Interpretación de la solución. a6. Uso de las ecuaciones para la resolución de problemas. Resolución de estos mismos problemas por métodos no algebraicos: ensayo y error dirigido.
Bloque de geometría	g1. Uso de los teoremas de Thales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras. g2. Volúmenes de cuerpos geométricos. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.
	3º ESO
Bloque de álgebra	a1. Análisis de sucesiones numéricas. Métodos y estrategias para buscar regularidades en sucesiones numéricas: término general. Sucesiones recurrentes. a2. Progresiones aritméticas y geométricas. Término general. Suma y producto de los primeros términos. a3. Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico. a4. Transformación de expresiones algebraicas. Igualdades notables. a5. Identidades y ecuaciones. a6. Resolución de ecuaciones de primer y segundo grado con una incógnita. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. a7. Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales, comprobando que la solución cumple las condiciones del enunciado del problema. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje algebraico para resolver diferentes situaciones de la vida cotidiana.
Bloque de geometría	g1. Aplicación de los teoremas de Thales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico.
	4º ESO opción A
Bloque de álgebra	a1. Resolución algebraica de ecuaciones de primer y segundo grado. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones. a2. Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante sistemas. a3. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos
Bloque de geometría	g1. Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas. Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana. g2. Uso de otros conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: medida y cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc.

	4º ESO opción B
Bloque de álgebra	a1. Ecuaciones de segundo grado. Estudio de las soluciones. a2. Ecuaciones reducibles a ecuaciones de segundo grado. a3. Manejo de expresiones literales. Utilización de igualdades notables. a4. Resolución gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Resolución de problemas cotidianos y de otras áreas de conocimiento mediante ecuaciones y sistemas, presentando ordenada y claramente los planteamientos, así como los procesos seguidos para resolverlos. a5. Resolución de otros tipos de ecuaciones mediante ensayo-error o a partir de métodos gráficos con ayuda de los medios tecnológicos.
Bloque de geometría	g1. Resolución de triángulos rectángulos g2. Aplicación de los conocimientos geométricos a la resolución de problemas métricos en el mundo físico: medida de longitudes, áreas y volúmenes.
Bloque de estadística y prob.	e1. Técnicas de combinatoria: Variaciones, permutaciones y combinaciones
	1º Bachillerato. Matemáticas I
Bloque de aritmética y álgebra	a1. Sistemas de ecuaciones lineales. Solución de un sistema. Tipos de sistemas lineales: Compatible determinado e indeterminado, incompatible. Resolución e interpretación de un sistema sencillo de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss. a2. Sucesiones numéricas. El número e. Logaritmos decimales y neperianos.
	1º Bachillerato. Matemáticas I aplicadas
Bloque de aritmética y álgebra	a1. Sistemas de ecuaciones lineales. Clasificación según soluciones. Interpretación gráfica. Sistemas equivalentes. Transformaciones elementales de equivalencia. Método de Gauss. a2. Polinomios. Operaciones con polinomios. Regla de Ruffini. Factorización de polinomios sencillos.
	2º Bachillerato. Matemáticas II
Bloque de álgebra lineal	a1. Sistemas de ecuaciones lineales. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales. a2. Teorema de Rouché-Frobenius. Discusión de la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales. El método de Gauss y la regla de Cramer. a3. Polinomios. Operaciones con polinomios. Regla de Ruffini. Factorización de polinomios sencillos.
	2º Bachillerato. Matemáticas II aplicadas
Bloque de álgebra	a1. Sistemas de ecuaciones lineales. Expresión matricial de un sistema de ecuaciones lineales. Tipos de sistemas lineales. Sistemas equivalentes. a2. Resolución de un sistema de ecuaciones lineales aplicando el método de Gauss y la regla de Cramer. Aplicación a la resolución de problemas extraídos de las ciencias sociales.

4.1. La Civilización Mesopotámica

La primera civilización de la Tierra surgió en un fértil valle rodeado por los ríos Tigris y Éufrates, hacia finales del cuarto milenio a.C. Los griegos le dieron el nombre de Mesopotamia ("Región entre ríos"), territorio que en la actualidad ocupan los estados de Irak (principalmente), Irán y Siria. La civilización mesopotámica era conocida también como civilización babilónica.

Las características del territorio favorecieron que sufriese numerosas invasiones de procedencia diversa, lo que permitió el florecimiento de gran variedad de pueblos, todos ellos de lengua y origen semíticos[1] (sumerios, acadios, asirios, medos, persas…) [10-11]. Lo importante es que se conservó siempre una uniformidad cultural lo suficientemente alta como para poder referirnos a esta civilización simplemente como mesopotámica, particularmente en el uso generalizado de la escritura cuneiforme, que se realizaba sobre tablillas de arcilla húmeda mediante un tallo vegetal biselado en forma de cuña. Miles de estas tablillas han sobrevivido hasta nuestros días, y gracias a ello se dispone de una gran cantidad de información sobre la civilización mesopotámica y más concretamente sobre sus matemáticas [12].

La mayoría de las tablillas con contenido matemático, que son unas 300, se encuentran en las Universidades de Columbia, Pennsylvania y Yale [13]. Los problemas que se planteaban eran sobre cuentas diarias, recibos, contratos, notas de contabilidad, préstamos de interés simple y compuesto y sistemas de medida [14].

Los babilonios fueron los pioneros en el sistema de medición del tiempo; introdujeron el sistema sexagesimal, una forma de contar que ha sobrevivido hasta nuestros días [12].

En Mesopotamia, el álgebra alcanzó un nivel considerablemente más alto que en Egipto. Formulaban y resolvían los problemas algebraicos de una manera completamente verbal (algebra retórica), sin utilizar símbolos especiales. A menudo aparecen en las resoluciones las palabras *us* (longitud), *sag* (anchura) y *aŝa* (área) como representación de las incógnitas, aunque esto no significa que dichas incógnitas representen tales cantidades geométricas. Se cree que gran parte de los problemas algebraicos surgieron de situaciones geométricas, y por ello esta terminología terminó por imponerse [13, 15].

Los babilonios sabían cómo resolver problemas concretos que involucraban ecuaciones de primer y segundo grado, usando completación de

1 Se dice de un grupo o familia de lenguas del sudoeste de Asia y del norte de África, entre las que destacan el árabe, el hebreo, el asirio y los extintos arameo, acadio y fenicio

cuadrados o sustitución, así como también ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, y sistemas de ecuaciones lineales y no lineales [16].

Algunos ejemplos concretos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales han llegado hasta nuestros días en las famosas *tablillas de Croquetta*, que datan del último periodo sumerio, hacia el año 2100 a.C.

En cuanto a las ecuaciones cuadráticas, disponían de la fórmula para resolverlas, pero dado que no conocían los números negativos, nunca consideraban las posibles raíces negativas. A pesar de que en las tablillas sólo aparecen ejemplos concretos, la mayoría de estos, sin duda, intentaban ilustrar un método general de resolución [13].

Además, sabían calcular raíces cúbicas y lo hacían a partir de tablas de cubos y de otras raíces cúbicas halladas previamente.

El álgebra babilónica alcanzó un nivel de abstracción tan extraordinario que las ecuaciones bicuadráticas fueron consideradas correctamente como simples ecuaciones cuadráticas disfrazadas.

4.1.1. Las matemáticas mesopotámicas en secundaria

Son muchas las posibilidades didácticas que ofrecen las tablillas babilónicas y que pueden ser aprovechadas por profesores de matemáticas en cualquier nivel educativo de la enseñanza obligatoria. En este trabajo se proponen algunas actividades que podrían realizarse en el aula para trabajar los diferentes bloques de contenidos establecidos en el currículo de matemáticas.

El sistema numérico heredado de los babilónicos (sistema sexagesimal posicional) es actualmente utilizado en la medición del tiempo y de los ángulos, y por ello se introduce en el currículo (contenido n1 de 2º de ESO). En las aulas raramente se hace mención a su origen. Sin embargo, resultaría muy interesante que los alumnos conociesen cómo surgió este sistema de medida y por qué. Esto les ayudaría a comprender su utilidad y ayudaría a motivarles.

Se proponen para ello las siguientes actividades:

- **Escritura de números en el sistema sexagesimal e intercambio entre las bases sexagesimal y decimal.**

Los alumnos podrán ayudarse de tablas, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo [11]:

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	60^3	60^2	60^1	60^0	60^{-1}	60^{-2}
7	7	3	5	2	5	#	2.	8.	55;	15	#
Número en base decimal						**Número en base sexagesimal**[2]					

- **Interpretación de tablillas: números y grafemas babilónicos.**

Los babilonios escribían sus números empleando únicamente dos símbolos, el clavo y la cuña (en escritura cuneiforme). Un solo clavo 𒁹 representa la unidad, y más de un clavo la suma de estos hasta un máximo de 9. Una cuña 𒌋 representa el número 10, dos cuñas el 20, y así sucesivamente hasta un máximo de 5 cuñas, puesto que al llegar a 60 se usa de nuevo un solo clavo en la siguiente posición. Así, un mismo símbolo podrá tomar diferentes valores según su posición. Para evitar ambigüedades los babilonios usaban el **sistema posicional**.

Veamos un ejemplo de interpretación de un número superior a 60 en escritura cuneiforme:

Cuneiforme	**Transliteración (sexagesimal)**	**Decimal**
	40.16.15	144975

Como actividad, se les podría mandar a los alumnos transcribir alguna tablilla e interpretar su contenido. Por ejemplo, la tablilla de la Figura 1 contiene la tabla multiplicar del 9. Los alumnos se sorprenderán al descubrir que para los babilonios era común aprenderse las tablas del 1 al 60, y no solo las del 1 al 10 como hacen ellos.

- **Actividades con tablillas de multiplicar babilónicas**.

Se les podría plantear que hiciesen alguna operación usando las tablillas y después comprobasen el resultado, que construyesen alguna tablilla usando escritura cuneiforme, etc.

Asimismo, hemos heredado numerosas tablillas babilónicas con contenido geométrico que podrían

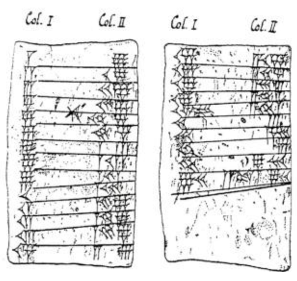

Figura 1: Tablilla babilónica

[2] No hay un criterio estandarizado para representar los números en base sexagesimal, depende del autor o del grupo de trabajo. Por esta razón, ese necesario aclarar cuál será el criterio usado: se usará el punto para separar las distintas posiciones, y el punto y coma para separar la parte entera de la decimal.

emplearse para trabajar diferentes contenidos del bloque de geometría del currículo. Por ejemplo, las siguientes tablillas podrían utilizarse para trabajar el Teorema de Pitágoras (g1 de 2º, 3º y 4º de ESO;):

- **La tablilla de Plimpton 322 y las ternas pitagóricas**

La tablilla Plimpton 322 (Figura 2) está datada entre los años 1900 y 1600 a.C. Se trata de una tablilla con 4 columnas y 15 filas cuya interpretación demuestra que los babilonios conocían las ternas pitagóricas unos 1500 años antes de que el mismísimo Pitágoras naciera [17].

Figura 2: Tablilla de Plimpton 322

Una posible actividad sería proponer a los alumnos que utilizasen internet para informarse sobre la historia de esta tablilla, su contenido, su significado, etc. Esta actividad sería apropiada para cualquiera de los cursos anteriormente indicados. Otra opción sería mandarles deducir nuevas ternas pitagóricas a partir de un par de números *(p,q)*. Las ternas pitagóricas vendrán dadas por $(p^2-q^2,\ 2pq,\ p^2+q^2)$. Esta actividad sería apropiada para un curso de 2º ó 3º de ESO.

- **La tablilla YBC 7289, el teorema de Pitágoras y la raíz cuadrada**

En base a la tablilla de Plimpton 322 se ha llegado a un acuerdo casi absoluto de que los babilonios conocían el teorema de Pitágoras. Sin embargo, hay quien se muestra en desacuerdo. La causa principal es que solo se conserva una tablilla en la que se integra la relación de Pitágoras acompañada de su representación geométrica. Se trata de la conocida YBC 7289 o tablilla de YALE (~1600 a.C.), mostrada en la Figura 3.

Figura 3: Tablilla YBC 7289 o tablilla de

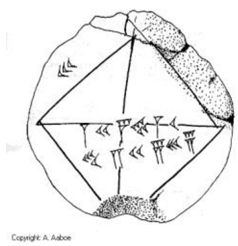

Figura 4: Transcripción de la tablilla de YALE

Como actividad, podría proponerse a los alumnos que intenten deducir qué significado tienen los números de la tablilla (Figura 4). Deberán darse cuenta de que se trata de un cuadrado de lado *a=30 u.l.* (30 en sexagesimal) y diagonal *d=42.426 u.l.* (42;25.35 en sexagesimal). Con el teorema de Pitágoras puede probarse fácilmente que $d = a\sqrt{2}$. Además, en la tablilla aparece el número sexagesimal 1;24.51.10, que en notación decimal es 1.414212, una buena aproximación de $\sqrt{2}$. Esta actividad sería apropiada para alumnos de 3º ó 4º de ESO.

- **La tablilla de Susa**

  La tablilla de Susa (~2000 a.C.) plantea un problema sobre un triángulo isósceles (ver Figura 5) cuyos lados miden 50, 50 y 60 u.l. El problema consiste en encontrar el radio de la circunferencia que inscribe al triángulo.

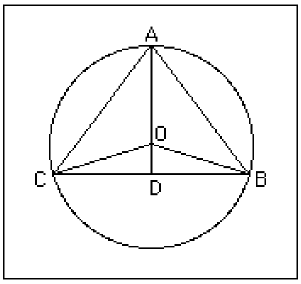

Figura 5: Problema planteado en la Tablilla de Susa

  Se propone al alumno que intente resolverlo, explicando el procedimiento utilizado. Este ejercicio sería adecuado para un grupo de 3º ó 4º de ESO.

Por último, para trabajar el bloque de álgebra (contenidos a5 y a6 de 2ºESO; a6 y a7 de 3ºESO; a1 y a2 de 4ºESO opc.A; a4 de 4ºESO opc.B) podrían platearse algunos de los problemas hallados en las famosas *tablillas de Croquetta*, entre los que se encuentran los siguientes:

- *Existen dos campos cuyas áreas suman 1800 yardas*[3] *cuadradas. Uno produce granos en razón de 2/3 de saco por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos en razón de 1/2 saco por yarda cuadrada. Si la producción total es de 1100 sacos, ¿cuál es el tamaño de cada campo?*
- *Hay tres clases de granos; tres gavillas*[4] *de primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuantas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase?*

Otros problemas hallados en tablillas babilónicas son:

- *Calcular el peso de una piedra si al añadirle un séptimo de su peso y al añadir a esta cantidad un onceavo de la misma cantidad se obtiene una mina.*

---

[3] Medida de longitud equivalente a 0,914 m.
[4] Conjunto de sarmientos, cañas, mieses, ramas, hierba, etc., mayor que el manojo y menor que el haz.

- *Cuarta anchura y una longitud son siete manos, una longitud y una anchura son 10 manos.*
- *Un número sumado con su inverso da como resultado 2;0.*
- *Calcular el lado de un cuadrado si su área menos el lado es 14;30.*

A modo de ejemplo, veamos la resolución de este último problema, que es equivalente a la resolución de la ecuación cuadrática $x^2-x = 870,$ y viene explicada por el escriba de la siguiente forma:

"Toma la mitad de 1 que es 0;30 y multiplica por 0;30 que es 0;15, suma este número a 14.30 lo que da 14.30;15. Este es el cuadrado de 29;30, ahora suma 0;30 a 29;30 cuyo resultado es 30, que es el lado del cuadrado"

Este tipo de problemas podrán plantearse en diferentes cursos de la ESO en función de su dificultad, y dependiendo del nivel del alumnado.

4.2. La Civilización Egipcia

Hacia el año 3150 a.C. nació a orillas del Nilo una gran civilización: los egipcios. De ellos heredamos los sistemas de notación jeroglífica, un gran paso con respecto a los primitivos textos pictográficos que se venían utilizando.

Figura 6: Papiro de Rhind

Son muchas las grabaciones jeroglíficas que se han hallado en piedras, tumbas y templos, y, sin embargo, muy poca la información matemática que se puede obtener de ellas. Afortunadamente, no son la única fuente de información de que disponemos: gran cantidad de papiros egipcios han llegado hasta nuestros días. Entre ellos, el de contenido matemático más importante y antiguo que se conserva es el denominado ***papiro de Rhind*** (Figura 6), actualmente expuesto en el *British Museum* de Londres. Este papiro es conocido también como el *Libro de Cálculo* o *Papiro de Ahmes*, en honor al sacerdote egipcio que lo escribió hacia el año 1650 a.C.[13].

Sobre el objetivo del papiro se conoce muy poco. Se cree que podría ser un documento dirigido a los *no iniciados,* con claras intenciones pedagógicas, o un cuaderno de notas de un alumno [16]. Para nosotros, en cambio, representa una guía de las matemáticas del Antiguo Egipto, pues es el mejor texto escrito en el que se revelan los conocimientos matemáticos.

En el papiro aparecen algunos errores, importantes en algunos casos, que pueden deberse al hecho de haber sido copiados de textos anteriores, tal y como revela el propio Ahmes. Aunque en la resolución de los problemas aparecen métodos de cálculo basados en *prueba y error*, sin formulación del procedimiento ni ningún tipo de justificación, y muchas veces tomados de las propias experiencias de los escribas, representa una fuente de información valiosísima [18]. El documento nos revela que los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos muy concretos, relacionados con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales [19]. No tenían notación simbólica, pero utilizaron símbolos para designar a la incógnita y a los operadores. Respecto al símbolo utilizado para designar a la incógnita, éste varía según la fuente consultada. Así, en algunos casos se hace referencia a la palabra *aha*, que significa "montón" o "cosa" [13, 18, 20], y en otros al jeroglífico *hau*, que quiere decir "montón" o "pila" [19]. Otras fuentes indican que la incógnita se representa mediante un *ibis*[5], que significa *escarbando en el suelo*, posiblemente por la primogénita aplicación del álgebra a la agrimensura[6] [16].

El papiro mide unos 6 metros de largo y 33 cm de ancho, y contiene 87 problemas con su resolución redactados en escritura hierática[7] [18]. En él se consideran las ecuaciones de primer grado. La del tipo $ax = b$ se resuelven mediante el procedimiento denominado *"Regula Falsi"* o *"Método de la Falsa Posición"* [20]. Esta aplicación directa de una única suposición invalida el procedimiento para problemas que necesiten una formulación algebraica afín, es decir, del tipo $ax+b = c$. En estos casos se utiliza la *"Regla de la doble Falsa Posición"*, desarrollada principalmente en la civilización árabe, como veremos más adelante. El único tipo de ecuación de segundo grado que aparece en el papiro de Ahmes es el más sencillo: $ax^2 = b$

---

[5] Ave zancuda. Los antiguos egipcios creían que se alimentaba de los reptiles que infestan el país después de las inundaciones periódicas del Nilo, y por ello la veneraban.

[6] La agrimensura fue considerada antiguamente la rama de la topografía destinada a la delimitación de superficies, la medición de áreas y la rectificación de límites.

[7] Hierático proviene del griego *γράμματα ἱερατικά*, que significa "escritura sacerdotal o sagrada". La escritura hierática permitía a los escribas del Antiguo Egipto escribir de forma rápida, simplificando los jeroglíficos cuando lo hacían en papiros, y estaba íntimamente relacionada con la escritura jeroglífica.

El ***papiro de Moscú*** (Figura 7) es, junto con el de Rhind, el más importante documento matemático del Antiguo Egipto. Desde 1912 está expuesto en el Museo de Bellas Artes de Moscú. Con 5 metros de longitud y tan sólo 8 cm de anchura consta de 25 problemas, aunque algunos se encuentran demasiado dañados para poder ser interpretados. El papiro fue escrito en hierática en torno al 1890 a.C. por un escriba desconocido, y se ignora el objetivo con el que fue escrito [18].

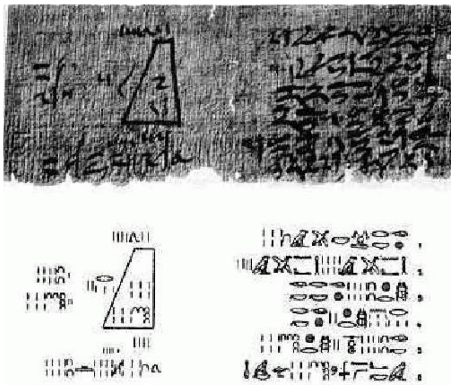

Figura 7: Papiro de Moscú: original, en hierática, y traducción, en jeroglífico.

De los 25 problemas de que consta hay 2 que destacan sobre el resto; son los relativos al cálculo del volumen de una pirámide truncada (problema 14, que aparece en la Figura 7), y el área de una superficie parecida a un cesto (problema 10). Este último es uno de los problemas más complicados de entender, pues no está clara la figura, y si la figura buscada fuese un cesto o un hemisferio entonces sería el primer cálculo de tal superficie conocido.

Después de estos comienzos tan prometedores, la matemática egipcia parece haberse estancado durante unos 2000 años.

4.2.1. Las matemáticas egipcias en secundaria

Como ya se ha mencionado anteriormente, una de las principales aportaciones de las matemáticas egipcias es el *“Método de la Falsa Posición”* o *“Regula Falsi”*, empleado en la resolución de ecuaciones lineales del tipo $ax=b$. Este procedimiento está basado en conceptos de proporcionalidad directa, lo que permite su utilización sin complicaciones en la Enseñanza Secundaria Obligatoria para resolver problemas relacionados con las ecuaciones de primer grado [20]. La resolución de este tipo de ecuaciones puede parecer sencilla. Sin embargo, es necesario que el alumno haya asimilado lo que significa que x es una “incógnita" y todo lo que ello conlleva. En 1º de ESO aún no han trabajado normalmente con lenguaje algebraico, y la utilización de las técnicas de la falsa posición permitiría resolver problemas de este tipo sin necesidad de hablar de “variables" ni de “incógnitas".

Concretamente, podrán trabajarse los contenidos a1 de 1º, a4 y a5 de 2º, a6 de 3º y a1 (opc.A), a1 y a2 (opc.B) de 4º del currículo de la ESO.

Teniendo en cuenta esto, se proponen la siguiente actividad:

- **Método Regula Falsi**

El problema siguiente tiene su origen en el antiguo Egipto (Papiro de Rhind, ~2000 a.C.):

"La suma de un cierto número y un séptimo del mismo número iguala 16. Calcule el número."

La solución se explica verbalmente sobre el papiro:

Si el número fuera 7 (conjetura)*, la respuesta sería 8, ya que un séptimo de 7 es 1 y siete más uno iguala ocho. Si multiplicamos 8 por 2* (factor de corrección) *nos ponemos 16, por lo tanto la solución es 7 multiplicada por 2.*

Esto es el Método *Regula Falsi* o método de la falsa posición, que en términos actuales consiste en:

- Si $f(x) = x + ax$, se supone un valor x_1 para x, luego se determina $f(x_1) = x_2$;
- Se busca k tal que $kx_2 = b$ y por la linealidad de f se tiene que $f(kx_1) = b$, por lo que $x = kx_1$

Tareas a realizar por el alumno:

1. Para el ejemplo anterior,

   a) Escribe la ecuación egipcia.

   b) Comprueba si la respuesta dada es correcta.

2. Resuelve las ecuaciones siguientes utilizando el mismo método, indicando en cada caso la conjetura, el resultado de dicha conjetura, la solución según el método y la verificación de la solución:

   a) $x + \frac{x}{3} = 24$

   b) $2x + \frac{5x}{3} = 33$

   c) $x + 4x = 12$

3. Responde a las siguientes preguntas:

   a) ¿Sirve el método para todas las ecuaciones anteriores?

   b) ¿Depende tu respuesta final de la conjetura?

   c) ¿Funciona el método para cualquier ecuación lineal?

   d) ¿Sirve el método para cualquier ecuación?

   e) ¿Por qué piensas que fue inventado este método?

Asimismo, el cálculo del volumen de la pirámide truncada del problema 14 del Papiro de Moscú podría dar mucho juego a la hora de trabajar el bloque de geometría (contenidos g2 de 2ºESO y g2 de 4ºESO, opciones A y B). Podría plantearse en el aula la siguiente actividad:

- **La pirámide truncada** (problema 14)

En este problema se pide calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrangular (Figura 7). Alrededor de la figura pueden verse los signos hieráticos que definen las dimensiones. En la parte superior aparece un 2, en la inferior un 4 y dentro de la figura un 56 y un 6.

Las instrucciones del escriba son las siguientes [1]:

“Si te dicen: una pirámide truncada de 6 como altura vertical por 4 en la base por 2 en el extremo superior. Tienes que cuadrar este 4, resultado 16. Tienes que doblarlo, resultado 8. Tienes que cuadrar 2, resultado 4.Tienes que sumar el 16, el 8 y el 4, resultado 28. Tienes que tomar un tercio de 6, resultado 2. Tienes que tomar dos veces el 28, resultado 56. Ves, es 56. Lo has hecho correctamente.”

En la Figura 8 se muestra la representación geométrica del problema. Analizando el desarrollo vemos que lo que ha hecho el escriba es aplicar la siguiente fórmula:

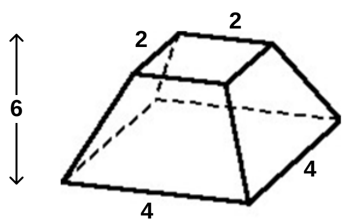

Figura 8: Representación geométrica del problema 14 del Papiro de Moscú.

$$V = h\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}$$

donde *h* es la altura y *a* y *b* las aristas básicas. Si consideramos ahora *b=0*, entonces se obtiene el volumen de una pirámide.

Responde a las siguientes preguntas: ¿Es cierto el resultado que aparece en el papiro? ¿Es correcto el procedimiento seguido? Razona las respuestas.

Nótese que se trata de un tipo problema al que hoy nos referimos como *problemas con palabras* o *problemas con historia*. Trabajar con este tipo de texto ayudará a desarrollar la comprensión lectora del alumno, algo indispensable en Matemáticas.

4.3. Los Griegos: Edad Helénica o Alejandrina

La actividad intelectual de las civilizaciones egipcia y mesopotámica empezó a decaer mucho antes de que comenzase la Era Cristiana, mientras que nuevas culturas comenzaban a florecer a lo largo de las costas mediterráneas. Así, a la época comprendida entre el 800 a.C. y el 800 d.C. se la conoce como *Edad Talásica* (Edad del Mar) [21], en la que los primeros años constituyen la denominada *Era Helénica*, cuyo nombre se debe a un pueblo procedente del norte que se asentó entre los mares Egeo y Jónico, el pueblo *heleno*[8], desprovisto de cultura pero con grandes ansias de aprender, y que heredaría la hegemonía cultural del Mediterráneo [13].

La historia de los griegos se remonta al segundo milenio a.C. Esta civilización se instruyó a partir de los avances de otros pueblos, y fue ampliando y mejorando esos conocimientos logrando, en menos de cuatro siglos (de Tales de Mileto a Euclides), construir un Imperio invisible y único cuya grandeza ha perdurado hasta nuestros días: la *Matemática*. Fue la civilización griega la que inició esta disciplina científica tal y como hoy la conocemos. Hasta entonces, la Matemática era como una *"colección de prescripciones útiles*"; no existían teoremas ni demostraciones, y fue en Grecia donde se convirtió en ciencia deductiva [21]. Comienzan a abordarse problemas matemáticos no vinculados a los problemas “reales” que habían dominado la época prehelénica. En general, los matemáticos griegos no se dedicaron mucho al álgebra; su preocupación era mayor por la geometría.

[8]Gente nacida en Grecia y de ese origen étnico y cultural. En la Antigua Grecia Clásica, conjunto de Ciudades-Estado más o menos independientes unas de otras pero que compartían una misma cultura, religión, idioma y escritura.

El desarrollo de la Matemática griega tuvo lugar en tres etapas fundamentales, cada una de ellas relacionada con un matemático ilustre: Pitágoras, Platón y Euclides. Cada uno de ellos aportó una singularidad esencial. **Pitágoras** (~582 - ~507 a.C.) fue el pionero instaurador de la tradición matemática griega y artífice de los fundamentos filosóficos e ideológicos de la Matemática. La figura central en todos los sentidos fue **Platón** (~427 – 347 a.C.), que se ocupó de crear un entorno académico donde se potenciaron de forma extraordinaria los estudios geométricos. Finalmente, **Euclides** (~325 - ~275 a.C.) recopiló todos los conocimientos precedentes en su obra ***Los Elementos***, que se convirtió en canónica[9] y paradigmática.

Esta obra es importante, no tanto por la originalidad de sus contenidos, sino por la sistematización el orden y la argumentación en la que está constituido. Se trata de un compendio, usando el lenguaje geométrico, de toda la Matemática elemental: Geometría plana y espacial, Aritmética y Álgebra [22]. Por su valor didáctico y su carácter de síntesis, ha sido utilizado como manual escolar hasta no hace mucho tiempo. La obra está constituida por trece libros, cada uno de los cuales consta de una sucesión de teoremas. Los Libros II y el V son casi completamente algebraicos, pero a diferencia de nuestra álgebra actual, que es simbólica, el álgebra de Los Elementos es un álgebra geométrica.

A este glorioso período de la Matemática griega (s.III a.C.) le siguió una época de decadencia que mejoró algo con las aportaciones de Ptolomeo pero que no llegó a recuperarse hasta la denominada “Edad de Plata” de la Matemática griega, entre los años 250 y 350 d.C. aproximadamente.

A comienzos de este periodo, conocido también como la *Edad Alejandrina Tardía*, nos encontramos con el más importante de todos los algebristas griegos, **Diofanto de Alejandría** (200/214 - 284/298) [13].

Diofanto es a menudo conocido como el “padre del álgebra”. Sin embargo, son muchos los que le reniegan este título ya que, aunque por cuestiones de notación sin duda se lo merece, en términos de las motivaciones y los conceptos desarrollados esta pretensión resulta mucho menos justificada.

[9] Canónico, en Matemática, indica algo que es natural, no arbitrario

Su popularidad se la debe a su obra ***Aritmética***, un trabajo sobre la solución de ecuaciones algebraicas y sobre la teoría de los números. Se trata de una colección de unos 189 problemas sobre aplicaciones del álgebra. Según el propio Diofanto, la obra comprende trece libros. Sin embargo, sólo conservamos seis de ellos. En estos problemas no hay ningún desarrollo axiomático, ni tampoco se calculan todas las soluciones posibles. Los griegos solo usaban los números naturales, y consideraban las fracciones como "relaciones" entre enteros, sin darlas tratamiento como números. Por ello, en la resolución de ecuaciones Diofanto sólo admitía las soluciones enteras positivas o racionales [23].

Con Diofanto tiene lugar el inicio del *"Álgebra sincopada"*, caracterizada por el uso de abreviaciones para las incógnitas, aunque los cálculos se describían totalmente en lenguaje natural.

Diofanto utilizaba una metodología de resolución propia conocida como *análisis diofántico*, *desarrollo diofántico* o *resolución diofántica* de ecuaciones. Su estrategia consistía en operar con las condiciones sucesivas de manera que solo apareciese una única incógnita a lo largo de todo el proceso, planteamiento que se acerca un poco a lo que hoy denominamos "método".

En su libro, Diofanto no establece ninguna distinción entre los problemas determinados e indeterminados. En estos últimos sólo da una de las infinitas soluciones.

Es muy probable de que algunos de los problemas y métodos de Diofanto sean de origen babilónico. No obstante, Diofanto ha tenido una influencia mucho mayor sobre la teoría de números moderna que cualquier otro algebrista no-geométrico griego.

4.3.1. Las matemáticas griegas en secundaria

La mayoría de los problemas matemáticos griegos presentan una visión geométrica, algo natural si consideramos que para los antiguos griegos su fuerte era la geometría. Sin embargo, la geometría se empleó muchas veces como "herramienta" para resolver ecuaciones algebraicas. Por ello, podría recurrirse a la historia de la Matemática griega al abordar los bloques de geometría y álgebra del currículo actual.

En el libro II de *Los Elementos* de Euclides, el álgebra geométrica servía más o menos para los mismos fines que el álgebra simbólica actual, y por ello podría incorporarse de forma natural en las clases de matemáticas de la etapa de Educación Secundaria.

Para trabajar el contenido a4 de 3ºESO, podría realizarse la demostración geométrica de los productos notables siguiendo el mismo razonamiento que utilizó Euclides [24-25]:

- **<u>Cuadrado de un binomio</u>** (proposición II.4 de *Los Elementos*):

  "Si una línea recta se corta de una manera arbitraria, entonces el cuadrado construido sobre el total es igual a los cuadrados sobre los dos segmentos y dos veces el rectángulo contenido por ambos segmentos."

  Esto es equivalente a decir que $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (representación geométricamente en Figura 9).

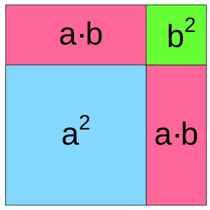

Figura 9: Cuadrado de un binomio

- **<u>Suma por diferencia</u>** (proposición II.5 de *Los Elementos*):

  "Si cortamos una línea recta en segmentos iguales y desiguales entonces el rectángulo contenido por los segmentos desiguales del total junto con el cuadrado construido sobre la línea recta entre los puntos de corte es igual al cuadrado sobre la mitad."

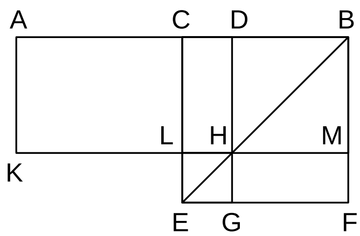

Figura 10: Suma por diferencia

  Este enunciado hoy lo conocemos abreviadamente por la expresión: a^2-b^2=$(a+b)(a-b)$. Euclides lo representó geométricamente como en la Figura 10.

  El diagrama que usa Euclides en este contexto jugó un papel clave en el álgebra griega. Si en la Figura 10 llamamos $AC = CB = a$ y CD = b, entonces el teorema nos dice que $(a+b)\ (a-b) + b^2 = a^2$. La comprobación geométrica de esta afirmación no es difícil. Sin embargo, la verdadera importancia de la figura no está tanto en la demostración del teorema como en el frecuente uso que hicieron los algebristas geométricos griegos de figuras análogas para resolver geométricamente algunos tipos concretos de ecuaciones (ver ejemplos en [26]), algo que se contempla en los contenidos del currículo de matemáticas (a3 y g2 de 4ºESO opc.A; a5 y g2 de 4ºESO opc.B). Por ejemplo, la Figura 10 sirve para obtener, geométricamente, la solución de la ecuación $ax-x^2=b^2$, cuando $a>2b$ [24].

Las demostraciones anteriores de los productos notables así como la resolución geométrica de ecuaciones podrían introducirse en las aulas haciendo uso de algún recurso multimedia, como por ejemplo estos applets de GeoGebra [27], de forma que, además de mejorarse la visualización del contenido y facilitarse su comprensión, se fomente el desarrollo de la competencia digital y el aprendizaje autónomo en los alumnos, entre otras competencias básicas, algo clave en la etapa de Educación Secundaria Obligatoria.

La traducción del lenguaje verbal al algebraico es uno de los principales contenidos del bloque de álgebra que se trabaja en todos los cursos de Educación Secundaria, y especialmente en 3º de ESO (a3). Se trata además de una de las principales dificultades que encuentran los alumnos a la hora de enfrentarse a un problema algebraico, debido generalmente a su escasa comprensión lectora. Por ello, sería interesante plantear en el aula actividades con contenido histórico que, además, servirán de motivación para el alumno. Véase a modo de ejemplo el siguiente problema hallado en la **tumba de Diofanto**:

"Transeúnte, ésta es la tumba de Diophante: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su juventud ocupó su sexta parte, después durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer vello. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole durante cuatro años. De todo esto, deduce su edad."

Asimismo, podrían plantearse algunos de los ejercicios presentes en el libro *Aritmética*, proponiendo una *resolución diofántica* de los mismos. Diofanto asigna una solución única para las igualdades (y desigualdades) del tipo $ax^2 \pm bx = c$ (clases A y B), y en las del tipo $ax^2 + c = bx$ (clase C), aunque existen dos modalidades —según si el cuadrado de ax es mayor o menor que el producto ac— Diofanto sólo toma en cuenta una de ellas [28].

Se denominan problemas analógicos los que trasladan las magnitudes conocidas y las incógnitas a una figura plana, directamente, tal como son enunciadas. La deducción del escriba se lleva a cabo sobre el diagrama, y de su certera manipulación se extraen el algoritmo y la prueba; pero el procedimiento mental desarrollado es analítico, en el sentido que le confiere Pappo de Alejandría[10]. Únicamente hay cuatro problemas con estas características en la *Aritmética*:

- *"Encontrar dos números tales que su suma y su producto formen dos números dados"*.
- *"Encontrar dos números tales que su suma y la suma de sus cuadrados formen números dados"*.
- *"Encontrar dos números tales que su suma y la diferencia de sus cuadrados formen dos números dados".*
- *"Encontrar dos números tales que su diferencia y su producto formen dos números dados"*.

Diofanto traslada al lenguaje aritmético sus condiciones y datos, expresados en función de la primera incógnita o *arithmos*. Iguala esta relación aritmética a una nueva expresión en la que aparece esa misma incógnita (aquí reside la parte más oscura y enigmática del método diofántico). Luego, establece la ecuación (o inecuación) [28].

Si la ecuación obtenida es de clase A ó B, Diofanto aplica un algoritmo que expresa de la siguiente manera:

"El cuadrado de la mitad del coeficiente de la incógnita, junto con el producto del término absoluto y el coeficiente del cuadrado de la incógnita, debe ser un número cuadrado."

El matemático resuelve varios problemas empleando este algoritmo:

- *"Dividir la unidad en dos números, y añadir a cada uno de ellos un número dado, de manera que su producto forme un cuadrado"*
- *"Encontrar tres números tales que la diferencia del mayor y el mediano tenga una relación dada con la diferencia del número mediano y el más pequeño, y tales que, tomados dos a dos, formen un cuadrado"*

---

10 Según escribe Pappo, el método analítico consiste en proponer como hipótesis la verdad que se quiere demostrar y, partiendo de ahí, desarrollar un argumento deductivo hasta alcanzar un principio unánimemente aceptado.

- *"Encontrar un triángulo rectángulo tal que el número de su área, aumentado en el número de una de las perpendiculares, forma un número dado"*

Si en cambio la ecuación obtenida es de clase C, el algoritmo que aplica es el siguiente:

"El cuadrado de la mitad del coeficiente de la incógnita, menos el producto del término absoluto y el coeficiente del cuadrado de la incógnita, debe ser un número cuadrado."

A partir de este algoritmo Diofanto resuelve los siguientes problemas:

- *"Dividir la unidad en dos partes, y añadir respectivamente a cada una de esas partes sendos números, de manera que formen un cuadrado."*
- *"Encontrar un triángulo rectángulo tal que el número de su perímetro sea un cubo, y que este perímetro, aumentado en el número del área del triángulo, forme un cuadrado."*

Este tipo de enunciados serían adecuados para grupos de 3º y 4º de ESO. En la referencia [28] pueden encontrarse más ejemplos.

4.4. La antigua Civilización China

Las civilizaciones china e hindú son más antiguas que las de Grecia y Roma, aunque no más que las que surgieron en los valles de Mesopotamia y del Nilo. Ambas se remontan a la denominada Edad Potámica. La civilización china tuvo su cuna en las cuencas de los ríos Amarillo y Yangtze. Los registros cronológicos son mucho menos fiables que los que existen para Egipto y Babilonia. Las estimaciones que se han hecho acerca del *Chou Pei Suan Ching*, considerado el más antiguo de los clásicos de contenido matemático, difieren entre sí en casi mil años; esto podría deberse a que la obra se atribuyen a varios autores de distintas épocas. Algunos historiadores lo sitúan en torno al 1200 a.C., mientras que otros lo sitúan en el primer siglo anterior a nuestra era, en torno al 300 a.C., poniéndolo así en estrecha competencia con otro tratado matemático, el *Chui-chang suan-shu* o los *"Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático"*, escrito por el hombre de estado y científico Chuan Tsanom en el año 152 a.C., durante la dinastía Han (220 a.C.- 200 a.C.), y que recoge todos los conocimientos matemáticos de la época [13, 16, 29].

El sistema de numeración chino era el decimal jeroglífico. Las reglas de las operaciones eran las habituales, aunque destaca como singularidad que en la división de fracciones exigían la previa reducción de éstas a común denominador. Dieron por sentada la existencia de números negativos, aunque nunca los aceptaron como solución a una ecuación.

El libro *Chou Pei* ("horas solares") trata de cálculos astronómicos, incluyendo también una introducción a las propiedades del triángulo rectángulo y algunas nociones sobre el uso de las fracciones. Está escrito en forma de diálogo entre un príncipe y su ministro sobre el calendario. La obra nos revela que la geometría en China, al igual que en Egipto, debió surgir de la agrimensura y que, como para los babilónicos, se reducía a un ejercicio de aritmética y álgebra. Al parecer, los chinos ya conocían el teorema de Pitágoras, un teorema tratado, en todo caso, algebraicamente [29].

El tratado *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático* ejerció gran influencia sobre los libros matemáticos chinos posteriores. La obra incluye 246 problemas sobre agrimensura, agricultura, impuestos, cálculo, resolución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos. En muchos casos la resolución de estos problemas conduce a sistemas de ecuaciones lineales utilizando números positivos y negativos.

Los chinos continuaron la tradición de los babilonios y nos legaron los primeros métodos del pensamiento lineal. Su contribución algebraica más importante fue, sin duda, el perfeccionamiento alcanzado en la regla de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Para todos los sistemas se establece un método genérico de resolución al que denominan la regla *"fan-chen"* que es, en esencia, el conocido método de Gauss nuestros días [16, 30]. Asimismo, utilizaban un método al que denominaban *ying bu zu shu,* que significa *"regla del exceso y del defecto"*, similar a la regla de la doble falsa posición empleada por los egipcios, aunque se cree que el uso de este procedimiento, así como el origen de la matemática china en general, fue independiente de toda influencia occidental [1].

Chu Shih-Chieh fue el último y más importante matemático chino del período Sung (960-1279). Publicó un libro elemental, *Introducción a los estudios matemáticos*, pero su obra más importante fue *SSu-yüan yü- Chien* o "*Espejo Precioso de los Cuatro Elementos"*, un libro que despertó gran interés y que marca la cota más alta alcanzada por el desarrollo del álgebra china. Los cuatro elementos a los que se refiere su título son el cielo, la tierra, el hombre y la materia, y representan a las cuatro incógnitas de una ecuación [31].

En este libro Chu Shih-Chieh estudia ecuaciones y sistemas hasta de grado 14, y establece elementos sólidos en la rama de la combinatoria mediante la descripción del denominado *“espejo precioso”* (Figura 11), similar al hoy conocido como triángulo de Pascal[11], indicando que sirve para obtener los coeficientes del binomio $(a + b)^{n}$ [30].

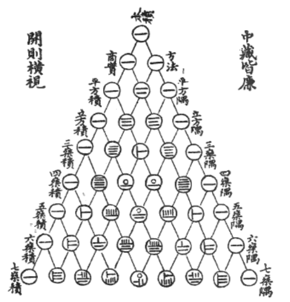

Figura 11: “Espejo precioso” chino

Explica además un método de transformación de ecuaciones al que denomina *método de fan fa* ("método del elemento celeste"). Se trata de un método de cambio de variable para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones polinómicas, que en occidente es conocido como el *“método de Horner”*, matemático que vivió medio milenio más tarde. En algunos casos obtiene aproximaciones decimales de las raíces.

Otro gran logro de la época medieval china fue la suma de progresiones desarrollada por Chon Huo (s. XI) y Yang Hui (s.XIII). Aproximadamente a mediados del siglo XIV comenzó un largo periodo de estancamiento.

4.4.1. Las matemáticas chinas en secundaria

No se puede decir que la geometría fuese el punto fuerte de la cultura china, limitándose principalmente a la resolución de problemas sobre distancias y semejanzas de cuerpos. Sin embargo, en muchos de estos problemas se calculaban distancias inaccesibles haciendo uso del Teorema de Pitágoras, un teorema ya conocido por los chinos mucho antes de que Pitágoras naciese, y que demostraron geométricamente de forma natural y elegante (Figura 12). Se cree que esta demostración, recogida en el *Chou Pei*, es la más antigua que

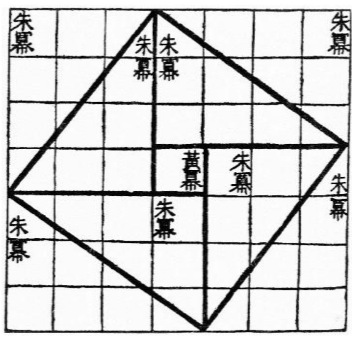

Figura 12: Demostración china del Teorema de Pitágoras

[11] Arreglo triangular de números en el que cada fila inicia y termina con 1, y cada número entre ellos es la suma del par de números que se encuentra sobre de él. El número en el ápice es 1. Los números en la enésima fila del triángulo de Pascal son los mismos que los coeficientes de *x* e *y* en el desarrollo de $(x+y)^{n-1}$, en donde $n > 1$.

existe (~1000 a.C.). Por ser una demostración tan natural e intuitiva, resulta muy adecuada para su uso en las aulas de secundaria.

El teorema de Pitágoras es un contenido recogido en el bloque de geometría del currículo (g1 en 2º, 3º y 4º de ESO, opciones A y B). Esta demostración podría llevarse al aula haciendo uso de algún recurso multimedia. Se propone para ello este applet de GeoGebra [32].

Asimismo, se propone la proyección en el aula de un video divulgativo [33] sobre el teorema de Pitágoras en el que se recurre a la historia de la Matemática para explicar a los alumnos un contenido tan importante, con el que trabajarán a lo largo de toda la etapa de Educación Secundaria:

De entre los múltiples problemas chinos de cálculo de distancias, destaca uno muy popular hallado en el capítulo IX del libro *Chu Chang Suan Shu* o *Arte Matemático en Nueve Secciones*, el problema de "**El junquillo chino"**, que dice así:

"Crece en medio de una laguna circular de 3m (300cm) de diámetro un junquillo que sobresale 30 cm del agua cuando se inclina hasta que lo cubre de agua alcanza justamente la orilla de la laguna, ¿qué profundidad tiene el agua?"

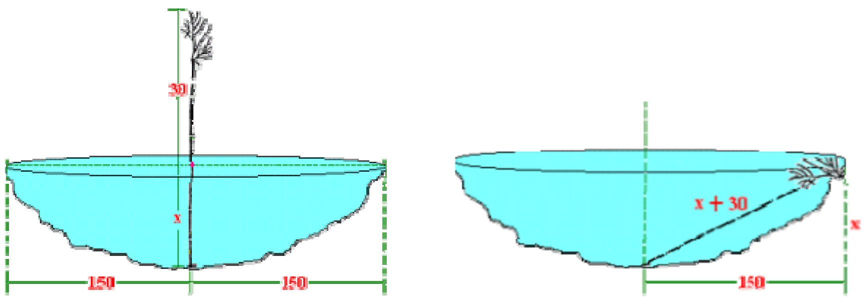

Figura 13: Problema "El Junquillo chino"

Este problema muy posiblemente haya pasado de La China a la India y en efecto se cree que es así pues *Bhâskara*, en su obra *Lilavati***,** expone este problema de manera ligeramente diferente [34].

Otros interesantes problemas de origen chino son los denominados *"cuadrados mágicos"*, que podrían utilizarse para trabajar las nociones de igualdad (numérica y algebraica) y equilibrio, y las ecuaciones de primer y segundo grado (contenidos a1 y a3 de 1ºESO; a1, a2, a3 y a5 de 2ºESO; a7, a5 y a6 de 3ºESO; a1 y a2 de la opción A, y del a1 al a4 de la opción B de 4ºESO).

Un *cuadrado mágico* es una cuadrícula de 3 x 3, o de 4 x 4, o de 5 x 5 o, en general, de n x n, en la que se acomodan ciertos números o expresiones que cumplen que la suma de cualquier renglón, la suma de cualquier columna y la suma de cualquiera de las dos diagonales es siempre la misma. A este valor se le llama constante mágica. El orden de un cuadrado mágico es el número de renglones o el número de columnas que tiene. Los cuadrados mágicos de orden impar cumplen la siguiente propiedad: *El orden del cuadrado multiplicado por el término central es igual al número mágico* [35].

Distinguiremos entre los cuadrados mágicos numéricos (Figura 14) y los algebraicos (Figura 15).

En los cuadrados numéricos, si el cuadrado es de n x n, entonces tendrá n^2 casillas que habrá que rellenar con los números del 1 al n^2.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 14: Cuadrado mágico numérico

En la web de redescolar [35] pueden encontrarse numerosos ejemplos y actividades con cuadrados mágicos numéricos muy adecuadas para los primeros cursos de la ESO. Además, existen aplicaciones para jugar online [36]

En cuanto a los cuadrados mágicos algebraicos, el objetivo del juego es determinar el valor de la incógnita de forma que se cumplan las condiciones anteriormente expuestas. Un posible ejemplo es el mostrado en la Figura 15. Podrían planteársele al alumno las siguientes preguntas:

$4(x+1)$	x	$2(x+2)$
$4x-1$	$2x+3$	$4x+3$
$(x+1)^2$	$(x+2)^2$	$x+1$

Figura 15: Cuadrado mágico algebraico

1. Escribe las sumas de las ocho líneas del cuadrado mágico.
2. Calcula el valor de *x* para que sea cuadrado mágico. Procura hacerlo con las ecuaciones más sencillas posibles.
3. Utilizando la suma de la tercera línea horizontal y otra cualquiera se puede obtener una ecuación de segundo grado. Resuélvela y comprueba que una de sus soluciones es el anterior valor de *x*.
4. Si el número mágico de este cuadrado es 15, halla, con el término central del cuadrado, el valor que debe tener *x*.
5. Halla el cuadrado numérico correspondiente.

Este tipo de actividades serían adecuadas para un nivel de 2º ó 3º de ESO, dependiendo de la complejidad de las expresiones algebraicas elegidas. En este enlace web [37] pueden encontrarse más ejemplos y actividades.

Otro posible acercamiento a las matemáticas chinas podría hacerse al trabajar el bloque de álgebra con los alumnos de bachillerato, explicándoles la regla *"fan-chen"* y su relación con lo que hoy conocemos como el Método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones al trabajar esta parte del currículo (contenidos: a1 de los dos 1os de bachillerato, y a1 y a2 de los dos 2os bachillerato).

Asimismo, se les podría introducir el *método de fan fa* para el cálculo aproximado de las raíces de algunas ecuaciones en 4º de ESO, al trabajar los contenidos a3 (opción A) y a5 (opción B). Este método, similar al *Método de Horner*, fue empleado por Chu Shih-Chieh para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones polinómicas, tal y como se muestra en el siguiente ejemplo:

- Para resolver $x^2+252x-5292=0$, obtiene por tanteo un valor aproximado por defecto, $x=19$ (es decir, la ecuación tendrá una raíz mayor que 19 y menor que 20). Luego hace el cambio de variable (el *fan fa*) $y=x-19$, para obtener $y^2+290y-143=0$. Esta ecuación tiene como solución aproximada $y=143/(1+290)=143/291$. Deshaciendo el cambio la solución aproximada es $x=19+143/291$.
- En la ecuación $x^3-574=0$, se obtiene por tanteo $x=8$ y se hace el cambio $y=x-8$. La nueva ecuación $y^3+24y^2+192y-62=0$ tiene como solución aproximada $y=62/(1+24+192)=2/7$. Por tanto la aproximación buscada es $x=8+2/7$.

Para finalizar, sería interesante recurrir a las matemáticas chinas a la hora de abordar contenidos relacionados con la combinatoria, el binomio de Newton o las sucesiones (Fibonacci, etc.), explicando el origen del conocido como "triángulo de Pascal" y proponiendo diferentes actividades en las que se haga uso de dicho triángulo (contenidos a1 y a2 de 3º ESO; e1 de 4º ESO opc.B; a2 de Matemáticas I y a2 de Matemáticas I aplicadas) [38].

4.5. La antigua Civilización Hindú

En torno al año 3000 a.C., el valle del Indo estaba habitado por una civilización con un alto nivel cultural, pero de la cual no conservamos ningún documento matemático. Un milenio más tarde, la zona fue ocupada por los invasores arios, quienes introdujeron el sistema social de castas y desarrollaron la literatura sánscrita[12] [13, 39]. A la sorprendente falta de continuidad de la matemática hindú se suma la inseguridad cronológica; las opiniones de los historiadores difieren en cientos de años.

En esta civilización, al igual que en la egipcia, existieron los denominados "tensadores de cuerdas", cuyos conocimientos geométricos primitivos fueron ampliándose a través de la planificación de templos y de la medición y construcción de altares, llegando a constituirse un cuerpo de conocimiento recogido en la obra denominada *sulvasutras* o "reglas de la cuerda"[13], de la cual se conservan tres versiones, todas ellas en verso, en las que encontramos reglas para la construcción de ángulos rectos por medio de ternas pitagóricas. Los *sulvasutras* han sido fechados por los historiadores de manera muy variada dentro de un intervalo de tiempo de casi 1000 años, que se extiende desde el siglo VIII a.C. hasta el siglo II de nuestra era.

A este período le sigue la época de los *Siddhantas* o "sistemas astronómicos". El comienzo de la dinastía del rey Gupta (~290) señala un renacimiento de la cultura sanscrita, y lo *Siddhantas* parecen haber formado parte de este renacer. Se conoce el nombre de cinco versiones diferentes de los *Siddhantas,* todos ellos tratados de astronomía formulados por medio de reglas crípticas en verso sanscrito, con muy pocas o ninguna demostración. Se suele admitir que estas obras aparecieron a finales del siglo IV o comienzos del V, aunque no hay un acuerdo respecto a los orígenes del conocimiento que contienen.

Esta época de resurgimiento cultural, también conocida como el "periodo alto" (200-1200 d.C.), es la más importante para el álgebra hindú, que alcanzó

[12] La lengua indoeuropea más antigua que hoy conocemos es el sánscrito, que apareció en la India aproximadamente en el año 2500 a.C., y que fue la lengua utilizada por los primeros pobladores de lo que hoy es Europa y Asia Menor. La literatura sánscrita gira en torno a la religión, el culto y la sabiduría.

[13] Nombre que hace alusión a la operación de extender o tensar las cuerdas para efectuar mediciones y guardar los datos obtenidos según unas reglas marcadas.

su plenitud gracias a las aportaciones de cuatro destacados matemáticos: **Aryabhata** (nacido el 476, año de la caída del Imperio Romano de occidente), **Brahmagupta** (nacido el 598), **Mahavira** (s.IX) y **Bhâskara** (1114-1185) [13]. Muchos de sus trabajos, y en general los de los matemáticos indios, estaban motivados por la astronomía y la astrología; de hecho, la mayor parte de los contenidos matemáticos se han localizado en capítulos de libros de astronomía.

Aryabhata es autor de uno de los textos matemáticos hindúes más antiguos que conocemos, el *Aryabhatiya* (~499), una obra cuya posición es bastante análoga para la India a la de *Los Elementos* de Euclides para los griegos. Ambas son una recopilación de desarrollos anteriores compiladas por un único autor. Sin embargo, son muchas las diferencias entre ellas. *Aryabhatiya* es una breve obra descriptiva escrita en 1232 estrofas métricas, con el objeto de suplementar las reglas de cálculo utilizadas en astronomía y en las reglas de medición matemáticas, sin ninguna relación con la lógica o la metodología deductiva [39].

Uno de los grandes progresos de la matemática hindú en la rama del álgebra fue el uso de abreviaturas de palabras y algunos símbolos para describir las operaciones. Este simbolismo, aunque no era exhaustivo, es suficiente para que se pueda clasificar el álgebra hindú como *cuasisimbólica*. Los problemas y sus soluciones correspondientes se escribían en este estilo cuasisimbólico; sólo se indicaban el los pasos dados para llegar a dicha solución, sin proporcionar ningún tipo de demostración ni justificación [13].

Además, los hindúes sabían que las ecuaciones cuadráticas tenían dos raíces, y consideraban las soluciones negativas y las irracionales. Los tres tipos de ecuaciones cuadráticas estudiados por Diofanto de manera independiente ($ax^2+bx=c$, $ax^2=bx+c$, $ax^2+c=bx$, con a, b, c positivos), fueron tratados por Brahmagupta y Bhâskara como un único caso $px^2+qx+r=0$, al admitir que los coeficientes podían ser negativos. Para su resolución utilizaban el *Método de completar cuadrados*.

Asimismo, estos matemáticos hindúes llegaron más lejos en la resolución de ecuaciones indeterminadas al considerar todas las soluciones enteras, a diferencia de Diofanto, que tomaba una única solución racional. Brahmagupta también estudió la ecuación diofántica cuadrática $x^2=1+py^2$, que recibe erróneamente el nombre de John Pell (1611-1685), y fue resuelta en algunos casos particulares por su predecesor Bhâskara (1114-1185) [40], el último matemático medieval importante en la India y el más importante del s.XII.

Bhâskara plasmó en sus obras las contribuciones hindúes anteriores a su época, completando algunos huecos de la obra de Brahmagupta. Entre ellas destaca su tratado más conocido, el *Lilavati* (título que toma del nombre de su hija) y otra obra menos conocida, llamada *Vija-Ganita*. En el Lilavati, hace una recopilación de problemas diversos de Brahmagupta y otros matemáticos, añadiéndoles nuevas observaciones de su propia cosecha: problemas de ecuaciones lineales y cuadráticas, tanto determinadas como indeterminadas; medidas de áreas; progresiones aritméticas y geométricas; raíces; ternas pitagóricas; etc. [39].

4.5.1. Las matemáticas hindúes en secundaria

La característica principal del desarrollo matemático de la cultura India es el predominio de las reglas aritméticas del cálculo, destacando la correcta utilización de los números negativos y la introducción del cero abstracto y del principio posicional. Profundizaron en la resolución de ecuaciones lineales y cuadráticas, algo que se revela en las obras que conservamos.

En el *Lilavati*, obra de Bhâskara, se plantean gran cantidad de problemas de diverso tipo: problemas algebraicos en los que se deben resolver ecuaciones lineales y cuadráticas; problemas de combinatoria; etc. Asimismo, Brahmagupta propone y resuelve problemas algebraicos en su obra *Brahmasphutasiddhanta*. Algunos de estos problemas son muy adecuados para su resolución en las aulas de secundaria, ya que el alumno, además de desarrollar sus capacidades matemáticas, mejorará su competencia lingüística (principalmente su comprensión lectora), algo que, como ya hemos dicho, es indispensable no solo para las matemáticas, sino para la vida. Además, el contenido histórico permitirá al alumno acercarse a las matemáticas desde su origen, lo que servirá como motivación.

De esta manera, se han seleccionado diferentes problemas de ambas obras que permitirán trabajar los siguientes contenidos de la ESO: a2 de 1º; a5 y a6 de 2º; a3 y a7 de 3º; a1 y a2 de 4º opción A; a4 de 4º opción B.

Un ejemplo del tipo de problemas que Brahmagupta propone y resuelve en el *Brahmasphutasiddhanta* es el siguiente [40]:

"Se prestaron 500 drammas con una proporción desconocida de interés; se prestó el interés en el dinero durante 4 meses a otro a la misma proporción de interés y se sumó en diez meses a 78 drammas. ¿Puede decirnos la proporción de interés?"

Algunos de los problemas planteados por Bhâskara en *Lilavati* son:

- *"Oh, doncella, un par de gansos que juegan en el agua; hay siete mitades de la raíz cuadrada (del total) de la bandada, cansándose de jugar, va a la orilla. Dígame el número de la bandada de gansos."*
- *"La raíz cuadrada de la mitad de un enjambre de abejas y ocho novenos del enjambre fue a un arbusto del jazmín, y una hembra está zumbando a un macho que también zumba permaneciendo entrampado dentro de un loto, al que su fragancia lo atrajo por la noche. Diga, querido, el número de abejas."*
- *"Si el interés en 100 debido a un mes es cinco, dime ¿cuál es el interés en 16 cuando el año ha pasado?. Dime también, matemático, el tiempo del principal y del interés, y la cantidad principal cuando el tiempo y el resultado son conocidos."*

En la referencia [40] pueden encontrarse más ejemplos.

La elección de uno u otro problema dependerá del curso en el que se esté trabajando así como del nivel que tengan los alumnos de dicho curso. Incluso alguno de ellos podría plantearse como ejercicio de profundización para aquellos alumnos más aventajados o con mayor interés y curiosidad por la materia.

El propio Bhâskara explica en el libro cómo procede para resolver éste tipo de problemas, una explicación que podría analizarse con los alumnos trabajando en gran grupo [1]. Veámoslo en un ejemplo. El enunciado del problema es el siguiente:

"Un hombre tiene seis caballos y trescientas monedas de oro; Su vecino, tomado de celos, le hizo entrar en su cuadra Diez caballos iguales: ¡por desgracia! Todavía debo sobre su valor cien monedas de oro; Sin embargo poseen el mismo capital. ¿Cuál es pues el precio de cada caballo?"

La solución que nos ofrece la realiza en los siguientes términos:

"Aquí el precio de un caballo, que es desconocido, pongámoslo igual a x; entonces por la regla de tres: si el valor de un caballo es x, ¿cuál es el de seis

caballos?: cuadro: 1 : x :: 6 : la renta multiplicada por la petición y dividida por el tipo da para cociente el valor de los 6 caballos, 6x. Entonces añadiendo a esto 300 monedas de oro, conocemos la riqueza del primero, a saber: 6x+300. También el valor de 10 caballos será 10x; al que se añaden 100 piezas tomadas negativamente; se conocerá la fortuna del segundo, a saber: 10x-100. Los dos por ellos mismos son iguales. Cuadro de los dos [miembros] preparados para la sustracción de las cantidades de la misma especie: 6x + 300; 10x – 100.

Entonces "que suprima a las desconocidas de la primera de las del segundo", es el dicho: suprimiendo a las desconocidas del primer miembro de las del segundo, la diferencia es 4x, y suprimiendo a los números conocidos del segundo miembro de los del primero, la diferencia es 400. Dividiendo por la diferencia de los números, el cociente determina el valor de x, sea 100. Si tal es el valor de x ¿cuál es el de 6x? Como diremos: el cociente, por la regla de tres, el valor de 6x, añadido a 300 monedas de oro, hará saber la fortuna del primero, a saber, 900, procediendo también, conoceremos la fortuna del segundo, a saber: 900."

Este texto podría trabajarse en el aula con alumnos de 2º ó 3º de ESO, pidiéndoles que interpreten lo que el matemático dice y que comprueben si el proceso seguido es correcto. Así, se trabajarán paralelamente el álgebra, la comprensión lectora y el lenguaje matemático.

4.6. La Civilización Árabe

Allá por el siglo VI la península Arábiga estaba habitada por dos clases de población enemistadas: la nómada, a la que pertenecían los árabes trashumantes – beduinos-, y la sedentaria [41]. Mahoma (570-622), un hombre llamado a cambiar la manera de pensar y sentir de sus compatriotas, consiguió formar un estado "mahometano" con centro en La Meca. A su muerte los árabes poseían una misma religión, se habían acostumbrado a obedecer a un soberano y se hallaban en condiciones de iniciar la conquista de un imperio. En unos veinte años conquistaron Damasco, Jerusalén, Alejandría y el valle mesopotámico, y en el siglo VIII ocuparon España y Marruecos [13, 41].

Durante el primer siglo del Imperio Musulmán no se produjo desarrollo científico alguno, mientras que el interés por el saber en el resto del mundo había desaparecido casi completamente. El pensamiento científico griego no producía ya obras originales. En estas condiciones surgieron los árabes, a quienes debemos el desarrollo de una de las más importantes ramas de las matemáticas, el Álgebra [42]. Las condiciones de vida, económicas y políticas que se formaron favorecieron el desarrollo de las Matemáticas.

Entre los siglos VIII y XIII, se produjo el despertar intelectual de la cultura árabe gracias al califa *Al-Ma'mûn*, quién ordenó traducir al árabe todas las obras griegas conocidas. Se fundaron escuelas por todo el Imperio, entre las que destaca *Bait Al-Hikma* ("Casa de la Sabiduría") en Bagdad, donde se traducían y estudiaban manuscritos científicos griegos y se investigaba y escribía sobre álgebra, geometría y astronomía. Entre los miembros de esta escuela destacaba *Mohammed ibn-Musa Al-Khowârizmî* (también conocido como *Al'Khwârizmî* o *Al-Khuârizmî*), autor de obras matemáticas y astronómicas, dos de las cuales han tenido especial importancia en la historia. La primera de ellas, *Al-jabr w´al muqâbala* (año 830), que significa "restauración y simplificación", está basada en una traducción árabe de Brahmagupta. De la segunda, sólo sobrevive la traducción latina, *Algoritmi de número Indorum*, en donde se explica con detalle el funcionamiento del sistema decimal y del cero que usaban en la India [30].

Al-jabr w´al muqâbala es una obra próxima al álgebra elemental moderna, que expone la resolución de diferentes tipos de ecuaciones, especialmente de segundo grado. En el texto se introducen ecuaciones que constan de tres tipos de términos o cantidades: *tesoros*, que son números multiplicados por x^2 (el tesoro); *raíces*, que son números multiplicados por x (la raíz del tesoro); y *números conocidos* [43]. Además, Al-Khwârizmî usa el término, *shay'* ("cosa") para designar con una cantidad desconocida [44].

Se consideran los siguientes seis tipos de ecuaciones, en sus formas canónicas:

- Tesoros igual a raíces: $x^2 = bx$
- Tesoros igual a números: $x^2 = b$
- Raíces igual a números: $x = a$
- Tesoros y raíces igual a números: $x^2 + bx = c$
- Tesoros y números igual a raíces: $x^2 + c = bx$
- Raíces y números igual a tesoros: $bx + c = x^2$

En base a dos operaciones, *reducir* a un solo tesoro *(al-jabr)* y *completar* el tesoro *(al-muquabala)*, se consigue que una ecuación cualquiera pase a ser de uno de los seis tipos anteriores.

La principal aportación y novedad de esta obra es que establece un conjunto completo de formas canónicas y expone algoritmos de solución de todas las posibilidades. Antes de Al-Khwârizmî se sabía resolver problemas cuadráticos con procedimientos tipificados, quizá incluso se sabía resolver cualquier problema cuadrático, pero *no se sabía que se sabía resolver todos los problemas cuadráticos* [44].

Para muchos Diofanto es considerado como el padre del álgebra. Otros, en cambio, creen que es Al-Khowârizmî quien merece ese título. Cierto es que la obra de Al-Khowârizmî representa un retroceso respecto a la de Diofanto: es de un nivel mucho más elemental y su álgebra es completamente retórica [13].

El álgebra árabe clásica desarrollada desde el siglo IX, a partir de la obra de Al-Khowârizmî*,* queda relegada al papel de mero intermediario entre la herencia griega e hindú y el Occidente cristiano medieval [43]. La ausencia de una simbología adecuada impide el desarrollo y generalización de métodos, y los trabajos se centran en la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, y ecuaciones cúbicas [42].

En el siglo X vivió otro gran algebrista llamado Abu Kamil, quien continuó los trabajos de Al-Khowârizmî. Sus avances en las leyes fundamentales e identidades del álgebra fueron utilizados más tarde por algunos matemáticos de la Europa Medieval.

La resolución de ecuaciones cúbicas con el uso de intersecciones de cónicas es el mayor avance hecho por los árabes en álgebra [13]. Asimismo, desarrollaron el procedimiento de la "doble falsa posición" para la resolución de ecuaciones del tipo $ax+b = c$, método que aparece en obras de diferentes matemáticos entre los que merece especial atención *Muhammad Ibn Al-Banna Al-Marrakushi* (1256-1321), quien en su obra *Taljîs fî a`mâl al-Hisâb* ("Breve exposición de las operaciones aritméticas") describe detalladamente, sin aportar ejemplos, esta regla de las falsas posiciones a la que denomina *"regla de los platillos de la balanza"* [20].

4.6.1. Las matemáticas árabes en secundaria

Como hemos visto, gracias a las aportaciones de los matemáticos árabes el Álgebra se consolidó como una de las principales ramas de la Matemática. Entre ellos destaca el algebrista Al-Khwârizmî, cuya principal obra, *Al-jabr w´al muqâbala*, recoge por primera vez todas las posibles formas que puede adoptar una ecuación cuadrática (que se reducen a seis formas canónicas), y propone diferentes algoritmos o reglas para su resolución. A lo largo del libro el algebrista plantea y resuelve diferentes problemas que podrían incorporarse a las aulas de secundaria para trabajar contenidos del bloque de álgebra del currículo (a3 a a7 de 3ºESO; a2 y a3 de 4ºESO opc.A; a1, a4 y a5 de 4ºESO opc.B). Además, algunos de estos problemas son resueltos de forma geométrica, por lo que se podrían trabajar paralelamente contenidos del bloque de geometría (g1 de 2º y 3º de ESO; g2 de 4ºESO). Concretamente consideraremos dos tipos de problemas:

- Aquellos en los que el número 10 se ha dividido en dos partes; se han realizado varias operaciones aritméticas con las partes y se da el resultado de esas operaciones o una igualdad entre los resultados de series de operaciones. Las incógnitas del problema son las dos partes en que se ha dividido diez.
- Aquellos en los que se realizan varias operaciones aritméticas con un *tesoro* y se da el resultado de ellas en *dirhams* o en *tesoros*. La incógnita es el *tesoro*.

Veamos algunos ejemplos [43]:

- <u>*Raíces y tesoros igualan números;*</u> *es como si tú dices, "un tesoro y diez raíces del mismo, igualan treinta y nueve dirhams*[14]*"; es decir, ¿cuál será el tesoro que, cuando se aumenta con diez de sus propias raíces, asciende a treinta y nueve?*

  La resolución de este problema equivale a resolver la ecuación $x^2+10x=39$, que ya está expresada en una de las seis formas canónicas. El propio Al-Khwârizmî deja bien claro que lo que se busca -la incógnita- no es la raíz, sino el tesoro:

  […] queda tres, que es la raíz del tesoro que buscabas; el tesoro mismo es nueve.

[14] dírhams: moneda oficial del Reino de Marruecos. El carácter monetario del *tesoro* queda aún más subrayado cuando los *números conocidos* pasan a ser monedas.

- *Tesoros y números igual a raíces; "He dividido diez en dos partes; luego he multiplicado cada parte por sí misma y sumadas resulta cincuenta y ocho dírhams".*

La solución que expone Al-Khwârizmî para este problema es la siguiente:

Construcción de la ecuación: *"Llamamos a una de las partes cosa, c; la otra será diez menos cosa, 10-c; multiplícala por sí misma, así obtendrás cien y un tesoro menos veinte cosas, 100 + c^2 - 20c, y multiplica luego cosa por cosa, que resulta tesoro, ($c \cdot c = c^2 = t$). Suma luego ambos, resulta la suma cien y dos tesoros menos veinte cosas igual a cincuenta y ocho dírhams, 100 + 2t- 20c = 58."*

Reducción a la forma normal: *"Restaura luego esos cien y dos tesoros de las veinte cosas substraídas y súmalas a los cincuenta y ocho, resulta cien y dos tesoros igual a cincuenta y ocho dirhams y veinte cosas, 100 + 2t = 58 + 20c.*

Reduce luego eso a un solo tesoro tomando la mitad del conjunto, resulta cincuenta dirhams y un tesoro igual a veintinueve dirhams y diez cosas, 50+t=29+10c.

Opón luego con ése el otro, quitando veintinueve de cincuenta, queda veintiún y tesoro igual a diez cosas, 21+t=10c"

Aplicación de la regla: *"Entonces halla la mitad de las raíces, resulta cinco; multiplica por sí mismo, resulta veinticinco. Quita luego de esto el veintiuno conectado con el tesoro, queda cuatro. Extrae luego su raíz, es dos. Quítala luego de la mitad de las raíces, que es cinco, queda tres. Resultado: Es una de las dos partes, y la otra es siete."*

Este proceso de resolución podría analizarse en el aula con los alumnos para hacerles caer en la cuenta de que lo que realmente está calculando Al-Khwârizmî es lo siguiente:

- Consideremos la ecuación de forma general como $x^2+c=bx$
- El valor de x vendrá dado por:

$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \frac{\mathrm{b} - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

una fórmula muy cercana a la definitiva.

Resolución geométrica: Si observamos este procedimiento de forma geométrica, veremos que la solución que se expone para este problema ($21+c^2=10c$) es la siguiente [1]:

- Supone que c^2 es el área de un cuadrado de lado desconocido *c*, y añade un rectángulo de la misma altura y base indeterminada, con área 21u^2 (Figura 16a).
- Al ser el área de la figura igual a *10c*, como la altura de la Figura 16a es *c*, entonces la base debe ser *10*, por lo que divide esta base por la mitad y levanta un cuadrado con este lado (Figura 16b).
- Ahora resta un cuadrado desde la parte superior del cuadrado de lado 5, y observa que las zonas sombreadas (Figura 16c) tienen la misma área, por lo tanto el área sombreada de la Figura 16d también es 21.
- Pero el área del cuadrado grande era 25, por lo que el área del cuadrado más pequeño será 25-21=4, de donde su lado es 2 y por tanto, c, que es la altura del rectángulo, mide 5-2=3.
- Al-Khwarizmi también observa que existe otra solución positiva y que esta es x = 7.

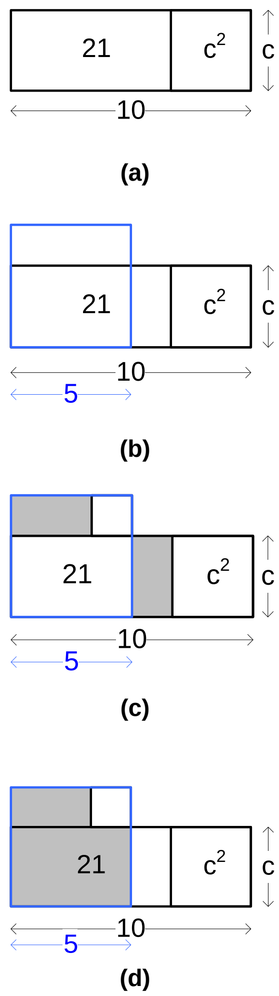

Figura 16: Resolución geométrica de *21+c²=10c*

Otros ejercicios similares a los anteriores serían:

- <u>*Tesoros y números igual a raíces;*</u> *"He dividido diez en dos partes, y cuando he multiplicado la una por la otra, resultó veintiuno".*
- *"Sea un tesoro, cuyo tercio y tres dírhams se le quita y luego se multiplica lo que queda por sí mismo y resulta el tesoro."*

Una aplicación didáctica de este tipo de problemas consiste en inferir la fórmula general de resolución de una ecuación de segundo grado [1].

En [1, 45] pueden encontrarse más ejemplos de ecuaciones de segundo grado resueltas geométricamente por Al-Khwarizmi. Su aplicación al aula podría hacerse a través de diferentes recursos, entre los que destaca el "puzzle algebraico". Este recurso permite:

- Representar geométricamente ecuaciones de segundo grado

- Obtener expresiones simplificadas equivalentes a una ecuación de segundo grado dada en forma general.
- Resolver ecuaciones de segundo grado.

En la web hay disponibles, para este recurso, una guía de profesor y un cuadernillo de actividades y ejercicios para el alumno.

Finalmente, se plantea la resolución de ecuaciones cuya forma canónica sea afín, es decir, del tipo *ax* + *b* = *c*, a través de la “regla de los platillos de la balanza" o método de la doble falsa posición [1, 20], que se representa gráficamente como indica la Figura 17.

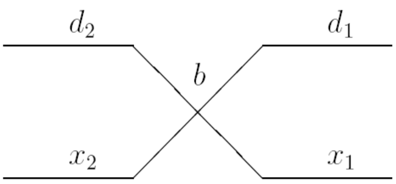

Figura 17: Método de la doble falsa posición.

En ella, x_1 y x_2 representan las falsas posiciones, d_1 y d_2 los errores, que *Ibn Al-Banna* escribía debajo o encima de los platillos según tuvieran valores positivos o negativos, y *b* el número dado. De esta forma se opera según la regla $x = \frac{x_2 d_1 - x_1 d_2}{d_1 - d_2}$.

Veamos un ejemplo. Si se quisiese encontrar una cantidad que verificase que un tercio de ella, más cinco sextos de ella más 6 fuese 25, lo que se corresponde con la ecuación $\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}x + 6 = 25$, se procedería del siguiente modo:

Supónganse dos valores, a priori falsos y elegidos convenientemente para simplificar los cálculos, x_1=6 y x_2=12, entonces: un tercio de 6, más cinco sextos de 6, más 6 hace un total de 13. El error cometido en este caso es d_1=13-25=-12. En el otro caso, un tercio de 12, más cinco sextos de 12, más 6 suman 20, que da un error de d_2=20-25=-5. Aplicando la regla obtenemos la solución:

$$x = \frac{12 \cdot (-12) - 6 \cdot (-5)}{-12 - (-5)} = \frac{114}{7}$$

Al no utilizarse en ningún momento el lenguaje simbólico, este tipo de ejercicios pueden plantearse en los primeros cursos de la enseñanza secundaria, para trabajar los contenidos: a1 y a3 de 1º y 2º de ESO.

5. Conclusiones

Generalmente los estudiantes ven las Matemáticas como algo cerrado, y no encuentran mucho sentido a los contenidos que estudian. Esto provoca desmotivación, desinterés y frustración. A través de la Historia de la Matemáticas se les puede mostrar el papel tan importante que esta ciencia ha tenido en la sociedad a lo largo del tiempo, lo que permitirá justificar la importancia de muchos contenidos del currículum y mostrar el lado más humano de las Matemáticas, haciéndoles cambiar su percepción.

Esta forma de enseñanza resulta mucho más motivadora, no sólo porque los alumnos ven la utilidad y funcionalidad de lo que están estudiando y lo comprenderán mejor, lo que fomenta el desarrollo de las competencias matemáticas y propicia que su aprendizaje sea significativo, sino también porque les permite darse cuenta de que no son los únicos que tienen dificultades. Además, la historia supone una oportunidad para promover el gusto por la investigación entre el alumnado, y ayuda a desarrollar la aproximación multicultural.

Sin embargo, no todas las ventajas se refieren al alumnado. Para los docentes también es beneficioso, ya que no sólo les ayudará a motivar a sus alumnos, sino que les permitirá conocer posibles dificultades a las que van a enfrentarse y les ayudará a ordenar la representación de los tópicos del currículo. Asimismo, la historia de las matemáticas posibilitará el trabajo multi e inter disciplinar. No obstante, los profesores deberán formarse para ello.

Los recursos y actividades propuestos a lo largo de este trabajo permiten la adaptación al nivel de cada alumno, lo que garantiza una adecuada atención a la diversidad. Asimismo, las diferentes metodologías de trabajo que pueden adoptarse (individual, por parejas, por grupos, de forma autónoma, con apoyos, haciendo uso de las TIC, etc.) permiten fomentar el desarrollo de las competencias básicas.

A pesar de que existen varios trabajos y proyectos que están impulsando el empleo de la historia en la enseñanza de Matemáticas, aún queda mucho por hacer.

6. Referencias

1. Suárez Alemán, C.O., ***Aprender Matemáticas a través de su historia***. 2001.
2. García Arribas, J.C., et al., *Las matemáticas : un punto de encuentro*. 2004.
3. Alonso Liarte, R. and P. Latorre Sancho, *Medir longitudes*. 2008.
4. Arenal Durán, P., et al., *Matemáticas e interculturalidad*. 2006.
5. Otaduy Ibáñez, P., *Las matemáticas también son cultura*, in *Idea : la revista del Consejo Escolar de Navarra*. 2005.
6. Delgado Romero de la Cruz, C., et al., *Mujeres y Matemáticas*. 2006.
7. Alcalde de Miguel, J.M., et al., *Creación de una revista matemática.* 2000.
8. Baños Zamora, R., et al., *El cero, punto de encuentro*. 2009.
9. Balbuena Castellano, L. and J.E. García Jiménez, *El Quijote y las Matemáticas*. 2004.
10. *La civilización mesopotámica*. [cited 2011 Mayo]; Available from: http://chopo.pntic.mec.es/~csanch20/MESOPOTAMIA/index.html.
11. Fernández Aguilar, E.M., *Babilonia y las Matemáticas en el aula.* Revista Digital de Ciencias Bezmiliana, 2010.
12. *Matemáticas babilónicas*. [cited 2011 Mayo]; Available from: http://www.profesorenlinea.cl/matematica/MatematicaBabilonia.html.
13. Lorente Morata, A.C., *Historia del Álgebra y sus textos.* p. 54.
14. Bautista Ramos, R. *La solución de ecuaciones como motor del desarrollo del álgebra*. in *XII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*. 2002. Departamento de Matemáticas de la Universidad de Sonora.
15. Malisani, E., *Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico.* Revista del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación (IRICE), 1999. **13**.
16. Luzardo, D. and A.J.P. P, *Historia del Algebra Lineal hasta los Albores del Siglo XX.* Divulgaciones Matemáticas, 2006. **14**(2): p. 18.
17. Fernández Aguilar, E.M. *Ternas pitagóricas*. Internet en el aula. Red social para una educación del siglo XXI 2009 [cited 2011 Mayo]; Available from: http://internetaula.ning.com/profiles/blogs/ternas-pitagoricas.
18. López, F. *Las Matemáticas en el Antiguo Egipto*. 1997-2010; Available from: http://www.egiptologia.org/ciencia/matematicas/papiro_moscu.htm.
19. *Un poquito de historia del Álgebra*. [cited 2011 Mayo]; Available from: http://redescolar.ilce.edu.mx/educontinua/mate/nombres/mate3a/mate3a.htm.
20. Suarez Alemán, C.O., *Resolución de ecuaciones de primer grado a través de la historia.*
21. Lupiannez , J., *La Matemática de Grecia. Arquimedes de Siracusa.*, in *Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92*. p. 14.
22. *EUCLIDES: BIOGRAFÍA DEL GRAN MATEMÁTICO GRIEGO*. Portal Planeta Sedna [cited 2011 Mayo]; Available from: http://www.portalplanetasedna.com.ar/matematico3.htm.
23. Alejandría, D.d. *Libro: La Aritmética y el libro sobre los números poligonales (Tomo II)* 2008 [cited 2011 Mayo]; Available from: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/publicacionesdiv/libros/LiburuakDet.asp?Id=491.
24. Boyer, C.B., *Historia de la Matemática*, ed. A. Editorial. 2001.
25. *Productos notables. Una mirada desde la geometría.*; Available from: http://www.comenius.usach.cl/webmat2/conceptos/encontexto/productos_notables_contexto.htm.
26. Meavilla Seguí, V. *Tópicos Matemáticos. Pitágoras y el álgebra geométrica.*; Available from: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/Topicos/AlgebraGeometrica/AlgebraGeometrica2.asp.

27. Sada, M. *Productos notables con GeoGebra*. 2007; Available from: http://diadematematica.com/GeoGebra/Manuel_Sada_Allo/notables.htm.
28. Yuste, P., *Ecuaciones cuadráticas y procedimientos algorítmicos. Diofanto y las matemáticas en Mesopotamia.* Theoria: Revista de teoría, historia y fundamentos de la ciencia, 2008. **23**(2): p. 26.
29. *Historia: Matemática china*. El paraiso de las Matemáticas 2010 Mayo 2011]; Available from: http://www.matematicas.net/paraiso/historia.php?id=ch_mate.
30. *Historia de la Matemática*. [cited 2011 Mayo]; Available from: http://www.profesorenlinea.cl/matematica/MatematicaHistoria.htm.
31. Úbeda Müller, J. and C. Úbeda Castellanos. *CHU SHI-CHIEH*. Matemáticas educativas 2004; Available from: http://www.iescarrus.com/edumat/biografias/siglos3/siglos3_02.htm.
32. Sada, M. *Demostración del Teorema de Pitágoras con GeoGebra*. 2005; Available from: http://docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/figuras/pitagoras1.htm.
33. *Pitágoras, mucho más que un teorema*. Universo Matemático 2007.
34. A.M.J. *El problema del junquillo chino*. 2010; Available from: http://matemolivares.blogia.com/2010/101702-el-problema-del-junquillo-chino..php.
35. *Hagamos cuadrados mágicos*. [cited 2011 Mayo]; Available from: http://redescolar.ilce.edu.mx/educontinua/mate/lugares/mate2i.htm.
36. *Cuadrados mágicos*. aulademates.com.
37. *Proyecto Thales CICA. Recursos didácticos de Matemáticas*. Available from: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Problemas/46-2-p-actividades.html#act14.
38. *El triángulo de Pascal*. [cited 2011 Mayo]; Available from: http://www.disfrutalasmatematicas.com/triangulo-pascal.html.
39. *Historia: Matemática Hindú*. El paraiso de las Matemáticas 2010 Mayo 2011]; Available from: http://www.matematicas.net/paraiso/historia.php?id=in_mate.
40. Sánchez Risco, J.A., *Las matemáticas en la India. 500d.C. a 1200 d.C.*: p. 62.
41. *Los árabes*. Portal Planeta Sedna; Available from: http://www.portalplanetasedna.com.ar/los_arabes.htm.
42. Luna Carmona, G., *Las Matemáticas en la escuela secundaria*, in *Pedagogía*. 2007, Instituto Michoacano de Ciencias de la Educación. p. 125.
43. Puig, L., *Componentes de una Historia del Álgebra. El texto de Al-Khwarizmi restaurado.*
44. Puig, L., *Historia de las ideas algebraicas: Componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la Matemática educativa.*: p. 14.
45. Meavilla Seguí, V. *Tópicos Matemáticos. Al-Khowarizmi y la ecuación de segundo grado* Available from: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/Topicos/AlgebraGeometrica/AlgebraGeometrica4.asp.